ASTIGMATISMO DA LENTE INCLINATA (A.L.I.)
di Luciano Pietropaolo

In molti casi le montature presentano una inclinazione più o meno accentuata delle lenti rispetto al piano frontale verticale.Il piano della lente risulta ruotato di un certo angolo intorno al suo diametro orizzontale (angolo detto pantoscopico) al fine di avvicinare all'occhio la parte inferiore della lente e ampliare così il campo di visione per il vicino. In altri casi, per un'esigenza soprattutto estetica, esso risulta ruotato intorno al diametro verticale, in modo da accostare alla tempia la parte esterna della lente: si tratta delle montature sportive, di tipo avvolgente.

In questo articolo si spiega come (a prescindere dagli effetti sulla visione periferica prodotti dalle montature avvolgenti), quando le lenti sono inclinate, il loro potere in visione primaria cambia in ogni caso, di tanto o di poco, rispetto al potere della prescrizione determinato con lenti di prova frontali.

Si presenta quindi il problema di determinare l'entità di tale alterazione e di come fare per ripristinare il giusto potere di prescrizione frontale.

1) Formula sagittale e tangenziale

Nel calcolo di Tscherning per la correzione dell'astigmatismo dei fasci obliqui (A.F.O.) e anche nel tracciamento dei raggi il centro di rotazione dell'occhio R' è sempre posizionato sull'asse ottico della lente a una distanza fissa l'_2 = 25 mm. dal punto apicale posteriore della lente.

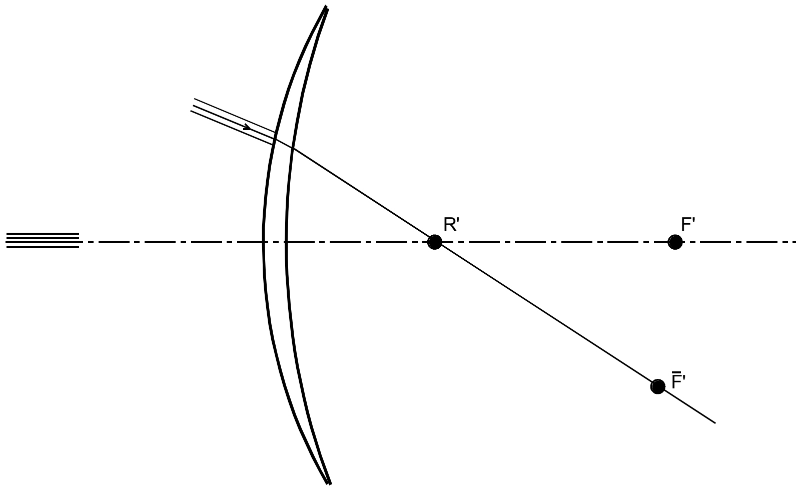
A seguito della rotazione pantoscopica o avvolgente R' risulta spostato sotto o a fianco dell'asse ottico, perciò la correzione dell'astigmatismo non può più basarsi sul diagramma di Tscherning. Infatti la lente "puntuale" è corretta da A.F.O. solo relativamente al ristretto fascio che dopo la rifrazione è diretto verso un determinato punto fisso dell'asse ottico, cioè R'.

Se la lente ha un'inclinazione pantoscopica, cioè è ruotata di un certo angolo α intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro, il fascio non inclinato che entra nell'occhio sarà però inclinato verso il basso rispetto all'asse della lente, di un angolo pari alla rotazione subita dalla lente intorno al suo punto apicale posteriore: il punto R' cade sotto l'asse ottico, perciò questo fascio risulterà astigmatico. L'angolo α sarà contenuto nel piano tangenziale centrale del fascio, che risulta quindi essere un piano verticale (figura 2) e la focalina tangenziale, perpendicolare ad esso, sarà orientata a 180°, cioè orizzontale.

Analogamente, se la lente ha un'inclinazione avvolgente, perché risulta ruotata di un certo angolo intorno a un asse verticale, si avrà astigmatismo con focalina tangenziale orientata a 90°.

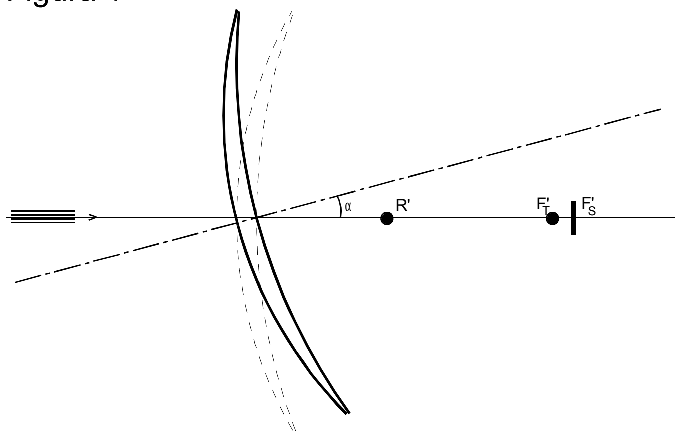
Il calcolo dell' astigmatismo, sia per l'inclinazione pantoscopica, sia per quella avvolgente, è sostanzialmente identico: non parte dal dato di uscita (che sarebbe i'_2 derivato dall'angolo di rotazione dell'occhio: così si procedeva nel caso di raggi obliqui rispetto a una lente non inclinata), ma dal dato di entrata, che è $i_1 = -\alpha$, considerando che il raggio che punta su R' in tale caso (lente sottile) non subisce deviazioni.

Quindi $i_2 = i'_1$ e $i'_2 = i_1 = -\alpha$ (Vedi figura). I quattro angoli ottici i_1, i'_1 , i_2 , i'_2 saranno d'ora in poi indicati per semplicità con *a*, *b*, *c*, *d* .



Lente puntuale: fascio obliquo

Figura 1



Astigmatismo da lente inclinata (ALI)

Figura 2

I piani di luce sagittali convergono ad un distanza determinata dal potere sagittale:

$$F_S = \frac{(n\cos b - \cos\alpha\,)F}{n-1} \qquad (1.1)$$

Dove F è il potere frontale della lente sferica.

Per la legge di Snell:

sen b = $\frac{sena}{n}$ quindi:

$n \cos b = n\sqrt{1-\frac{sen^2\alpha}{n^2}}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-sen^2\alpha}$

Sviluppiamo in serie le due radici fino al 3° ordine:

$$\sqrt{1-\frac{sen^2\alpha}{n^2}} \approx 1-\frac{sen^2\alpha}{2n^2} \qquad ; \qquad \sqrt{1-sen^2\alpha} \approx 1-\frac{sen^2\alpha}{2}$$

perciò la parentesi contenuta nella (1.1) diventa:

$$n\cos b-\cos\alpha = \frac{(n-1)(2n+sen^2 a)}{2n}$$

e quindi abbiamo l'espressione finale del potere sagittale:

$$F_S = F\left(1+\frac{sen^2\alpha}{2n}\right) \tag{1.2}$$

I piani di luce tangenziali convergono invece ad una distanza determinata dal potere tangenziale F_T che, applicando le medesime approssimazioni, è esprimibile così:

$$F_T = \frac{F}{\cos^2\alpha}\left(1+\frac{sen^2\alpha}{2n}\right) \qquad (1,3)$$

2) Lente sferica

Consideriamo il caso della rotazione pantoscopica (per quella avvolgente, come si è detto, il procedimento è sostanzialmente identico, con le dovute varianti). Per quanto detto, tale rotazione applicata a una lente sferica la fa diventare torica lungo l'asse di fissazione frontale (orizzontale) con poteri dati dalle (1.2) e (1.3). Si noti che, sia per lente positiva, sia per lente negativa, F_T risulta sempre maggiore*, in valore assoluto*, di F_S e perciò la focalina tangenziale -parallela all'asse di rotazione pantoscopica- è sempre quella più vicina alla lente.

Allora si sceglie F_S come potere di sfera (*S*) e $F_T - F_S$ come potere di cilindro ad asse 180 , che chiameremo "cilindro indotto" con asse parallelo all'asse della rotazione pantoscopica. Se indichiamo con *S* il potere di sfera prima indicato con *F*, avremo quindi un nuovo potere di sfera $\underline{S}$ e di cilindro $\underline{C}$:

$$\underline{S} = S\left(1+\frac{sen^2\alpha}{2n}\right) \tag{2.1}$$

$$\underline{C} = S\left(1+\frac{sen^2\alpha}{2n}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 a}-1\right) \text{ asse 180} \tag{2.2}$$

N.B. Sarà $\underline{C} > 0$ per lenti sferiche positive e < 0 per lenti sferiche negative. L'asse geometrico del cilindro coincide con l'asse del meridiano il cui potere rappresenta il minuendo della sottrazione che determina il valore del cilindro, mentre il sottraendo rappresenta il potere di sfera.

3) Lente torica

Se la lente è torica, l'effetto prodotto dalla rotazione pantoscopica è più complesso. Indichiamo con S, C, δ i dati di prescrizione: sfera, cilindro e asse. In tal modo separiamo le due componenti e analizziamo come ciascuna componente si trasforma a seguito della rotazione pantoscopica. Per semplificare, denominiamo:

$$a \equiv \left(1 + \frac{sen^2\alpha}{2n}\right) \quad ; \quad b \equiv cos^2\alpha$$

SFERA

In base alle (2.1) e (2.2) la rotazione dà luogo a un nuovo valore di sfera:

$$S_1 = Sa \tag{3.1}$$

e un nuovo cilindro (*cilindro indotto)*:

$$C_1 = S\,\frac{a}{b} - S\,a \quad \text{con } \delta_1 = 180 \tag{3.2}$$

CILINDRO

La rotazione ha l'effetto di modificare i dati del cilindro originario sia come valore sia come asse. Siano C_2 e δ_2 i valori del cilindro modificato, da determinare. Una volta determinato tale cilindro, si dovrà eseguire la combinazione tra questo e il cilindro indotto: si tratta di due cilindri ad assi obliqui che danno luogo ad una nuova combinazione sfero cilindrica, il cui valore di sfera dovrà incorporare il valore modificato della componente di sfera S_1.

Per determinare il cilindro C_2 bisogna determinare gli pseudopoteri del cilindro C lungo i due meridiani ad asse 90 e 180 (vedi in questo sito l'articolo di Luciano Pietropaolo "Proprietà ottiche dei cilindri "):
Essendo δ misurato positivamente con rotazione antioraria dall'asse orizzontale, (asse 0 $\equiv$ 180) gli pseudopoteri risultano:

$$C_{90} = C\,cos^2\,(90-\delta) = C\,sen^2\,\delta \tag{3.3}$$

$$C_{180} = C\,cos^2\delta \tag{3.4}$$

Si noti che δ è l'orientamento dell'asse geometrico, sul quale il potere è zero, mentre il valore massimo C è inteso sul contrasse, perciò, se ci spostiamo da δ su un meridiano θ e vogliamo determinare il potere sul relativo contrasse, dobbiamo tener conto che questo potere, inizialmente pari a C, *diminuirà* in ragione del cos^2 dell'angolo di spostamento da δ.
A seguito della rotazione pantoscopica il meridiano ad asse 180 diventa meridiano tangenziale e modifica il suo potere in base alla formula (1.3), quello ad asse 90 diventa sagittale e modifica il suo potere in base alla formula (1.2). Chiamiamo C_T e C_S questi poteri modificati:

$$C_S = a\,C\,sen^2\delta \tag{3.5}$$

$$C_T = \frac{a}{b}\,C\,cos^2\delta \tag{3.6}$$

Questi ultimi sono gli pseudopoteri che il cilindro modificato assume sugli assi 90 (sagittale) e 180 (tangenziale). Ci interessa determinare il potere del cilindro modificato e l'orientamento del suo asse (C_2 e δ_2).
Per questo, proiettiamo l'incognita C_2 sugli assi: otterremo i valori già noti C_S e C_T :

$$a\,C\,sen^2\delta \;=\; C_2\cos^2(90-\delta_2) \;=\; C_2\,sen^2\,\delta_2$$

$$\frac{a}{b}\,C\cos^2\delta \;=\; C_2\cos^2\delta_2$$

Dividendo membro a membro queste due equazioni otteniamo δ_2

$$\delta_2 = \pm\ \arctan\left(b^{1/2}\tan\delta\right) \qquad (3.7)$$

dove si sceglie il segno + se $\delta < 90$ e il segno – se $\delta > 90$. Nel secondo caso, il valore negativo di δ_2 andrà rimpiazzato col valore positivo $\delta_2 + 180$. (Si noti che δ_2 è anche l'angolo formato dagli assi dei due cilindri, essendo zero il valore angolare dell'asse di C_1).

Sommandole membro a membro otteniamo C_2:

$$C_2 \;=\; a\,C\,sen^2\delta + \frac{a}{b}\cos^2\delta \qquad (3.8)$$

Resta ora da eseguire la combinazione fra cilindro indotto C_1 asse 180 e il cilindro modificato C_2 asse δ_2 .
Il cilindro C_1 sarà il *primo cilindro* essendo quello con valore angolare minore ($\delta_2 = 180 = 0$), il cilindro C_2 (con valore angolare maggiore) sarà il *secondo cilindro*.
Sappiamo che il risultato di questa combinazione equivale a un sistema bicilindrico che presenta un valore estremo (massimo o minimo) su un meridiano $\underline{\delta}$ e un altro valore estremo (minimo o massimo) sul meridiano a 90° dal precedente. Il valore estremo $\underline{\delta}$ si ottiene dall'equazione già risolta:

$$\underline{\delta}(S,C,\delta) \;=\; \frac{1}{2}\arctan\frac{C_2\,sen(2\delta_2)}{C_1 + C_2\cos(2\delta_2)} \qquad (3.9)$$

(basta inserire i valori delle (3.2) (3.7) e (3.8)).

Per stabilire se si tratta di massimo o di minimo, bisogna calcolare i valori $\Phi_{\underline{\delta}}$ e $\Phi_{\underline{\delta}+90}$ che il sistema bicilindrico assume sul meridiano $\underline{\delta}$ e su quello $\underline{\delta}+90$. Φ_1 lo si ottiene sommando i valori che i cilindri obliqui C_1 e C_2 assumono su tale meridiano. Questi valori di contrasse sono rispettivamente nulli lungo gli assi di C_1 e C_2 ma se ci allontaniamo da questi, *crescono* in ragione del sen^2 dell'angolo di spostamento da 180 e da δ_2. Perciò:

$$\Phi_{\underline{\delta}} \;=\; C_1\,sen^2\underline{\delta} + C_2\,sen^2(\underline{\delta} - \delta_2) \qquad (3.10)$$

Per $\Phi_{\underline{\delta}+90}$ possiamo più semplicemente procedere tenendo conto che:

$$\Phi_{\underline{\delta}} + \Phi_{\underline{\delta}+90} = C_1 + C_2 \qquad (3.11)$$

perciò:

$$\Phi_{\underline{\delta}+90} \;=\; C_1 + C_2 - \Phi_{\underline{\delta}} \qquad (3.12)$$

Se, per esempio, $\Phi_{\underline{\delta}}$ risulta essere il valore minimo e il cilindro iniziale C era positivo, sceglieremo $\Phi_{\underline{\delta}}$ come valore di sfera e $\Phi_{\underline{\delta}+90}$ - Φ_{δ} come valore di cilindro con asse $\underline{\delta}$. Il contrario se C era inizialmente negativo: allora $\Phi_{\underline{\delta}+90}$ è il valore di sfera e $\Phi_{\delta} - \Phi_{\underline{\delta}+90}$ è il valore di cilindro con asse $\underline{\delta} + 90$.

Abbiamo determinato in questo modo l'alterazione prodotta dalla rotazione pantoscopica, sotto forma di nuovi valori $\underline{S}$, $\underline{C}$, $\underline{\delta}$, confrontabili con quelli iniziali S, C, δ.

4) Inversione

Il problema che si pone praticamente è questo: data la prescrizione in termini di sfera, cilindro e asse, scelto l'indice di rifrazione e misurato l'angolo α di inclinazione pantoscopica della lente rispetto al piano verticale, come devono essere scelti i valori di sfera, cilindro e asse (S^*, C^* e δ^*) affinché il fascio frontale utilizzato dall'occhio in posizione primaria si rifranga in modo da rispettare la prescrizione?

Le relazioni (3.9), (3.10) e (3.12) sono formule risolutive che ci consentono di determinare i valori alterati che abbiamo indicato con $\underline{S}$, $\underline{C}$ e $\underline{\delta}$, in funzione dei valori di prescrizione S, C, δ .

Se in tali formule sostituiamo a $\underline{S}$, $\underline{C}$ e $\underline{\delta}$ i valori di prescrizione S, C, δ e al posto di questi facciamo figurare i valori che cerchiamo, S^*, C^*, δ^* , le tre relazioni diventano un sistema di tre equazioni in tre incognite, matematicamente risolubile in modo esatto, che ci fornisce la soluzione del problema.

Il sistema è di secondo grado e fornisce due soluzioni, che sono otticamente l'una la trasposta dell'altra, in corrispondenza al fatto che la prescrizione originaria può anch'essa essere formulata in termini di ricetta o di trasposta (cioè scegliendo il cilindro positivo o negativo).

Il software che abbiamo elaborato permette di determinare sia l'alterazione dei valori di sfera cilindro e asse, sia i nuovi valori necessari per ripristinare la prescrizione originaria, tanto per lenti su montature pantoscopiche quanto per lenti su montature avvolgenti.

Diamo di seguito alcuni esempi del calcolo dell'alterazione e della nuova prescrizione in caso di lenti avvolgenti e pantoscopiche con angolo di 18° e poi di 28°

LENTI AVVOLGENTI n = 1,5	angolo di avvolgimento = 18°			n=1,5 angolo di avvolgimento = 28°		
Prescrizione	sfera -2,50	cil. -1,00	ax 60°	sfera -2,50	cil. - 1,00	ax 60°
Alterazione	-2,63	-1,28	66°	-2,79	-1,85	73°
Nuova prescrizione	-2,35	-0,82	51°	-2,09	-0,74	37°

LENTI PANTOSCOPICHE n= 1,5	angolo pantoscopico = 18°			n=1,5 angolo pantoscopico = 28°		
Prescrizione	sfera +2,75	cil. +1,25	ax 135°	sfera +2,75	cil. + 1,25	ax 135°
Alterazione	2,96	1,4	143°	3,22	1,83	152°
Nuova prescrizione	2,52	1,19	127°	2,18	1,24	118°

Si rileva che l'inclinazione della lente produce generalmente un incremento dei valori di sfera, cilindro e asse cui bisogna opporre una riduzione degli stessi al fine di ripristinare i valori di prescrizione originari.

Ovviamente la riduzione non è esattamente l'opposto dell'incremento, dal momento che la trasformazione in atto non è un operatore lineare.

Variazione dello pseudopotere del cilindro puro (figura 3) e del sistema bicilindrico (figura 4) in funzione del meridiano da 0 a 180 gradi. Il potere effettivo di focalizzazione si ha solo nei valori di massimo e di minimo della funzione.

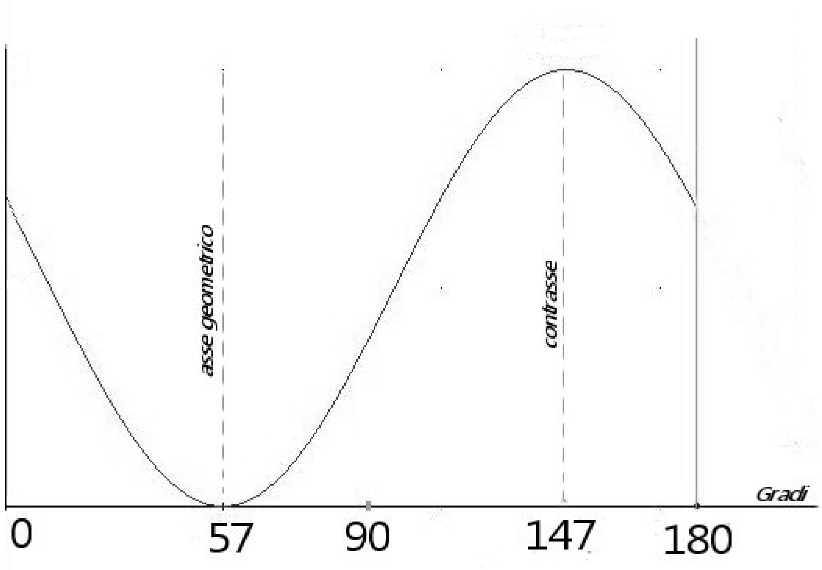


Figura 3 : cilindro puro con asse a 57°

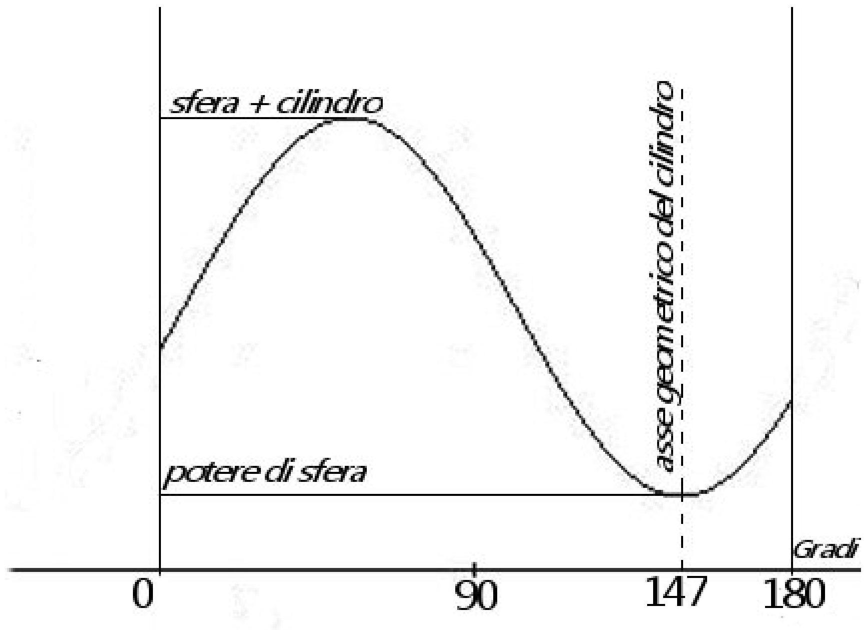


Figura 4 : sistema bicilindrico (= sfera + cilindro)